

关于Kähler Ricci Flow的论文往返交锋 聚焦Bergman函数与极化规范半径

KRF

近日，几何分析领域围绕 Kähler Ricci Flow（凯勒-里奇流）的一项研究展开了一场公开学术讨论。争论涉及田刚、张旗等学者的新近预印本《Laplace comparison on Kähler Ricci flow and convergence》，以及陈秀雄、王兵发表的两篇回应文章。相关讨论主要围绕 Bergman 函数、极化规范半径（polarized canonical radius，简称 pcr）、切锥（tangent cones）以及测地线连通性等技术问题展开。

争议起源：对既有文献提出三项质疑

在预印本[3]的Appendix中，田刚等作者指出，陈秀雄与王兵2020年发表于Journal of Differential Geometry的论文[1]可能存在三个值得进一步讨论的问题。

首先，作者认为在处理 Kähler Ricci Flow爆破(blow-up)极限时，Bergman 函数的下界可能趋于负无穷，从而质疑论文中用于定义极化规范半径(pcr)的关键条件是否能够保持一致。Appendix中给出了一个缩放计算，并指出在固定线丛次数的情况下，Bergman 函数下界似乎会随着缩放因子增大而下降至负无穷。

其次，作者对论文中关于切锥结构证明的一步推导提出疑问，认为某个极限过程中右端出现的零值缺乏充分解释，同时质疑相关 (W) 泛函极小化的论证。

第三，补充说明指出，在关于测地线连通性的命题证明中，文中使用“curve”（曲线）而非“minimal geodesic”（最短测地线），可能导致反证法中的逻辑链条出现问题。

陈秀雄、王兵回应：核心反例建立在错误缩放之上

针对上述质疑，陈秀雄与王兵于 2025 年 10 月 30 日发表《Two Comments on “Laplace comparison on Kähler Ricci flow and convergence”》[2]。作者指出，对方关于 Bergman 函数趋于负无穷的计算存在根本性错误。

回应认为，在对度量进行缩放时，必须同步调整极化线丛。若将度量缩放为

$$\tilde{g} = 4kj_0^2 g,$$

则对应的线丛也应同时变为

$$\tilde{L} = L^{4kj_0^2},$$

而不能继续使用原来的线丛结构。忽略这一点会导致维数估计失效。利用 Riemann–Roch 定理，作者进一步指出，线丛截面空间维数实际上会与缩放因子同步增长，从而抵消体积增长效应。因此，对方所声称的

$$\inf b^{(j)} \rightarrow -\infty$$

并不能成立。

文章进一步引用 Yau–Tian–Zelditch–Lu–Catlin Bergman 核渐近展开公式，认为在正确缩放下，Bergman 函数趋向于一个有限常数，而不可能发散到负无穷。

一个小花絮：陈秀雄与王兵[2]指出文[3]中张旗的一个致谢令人费解。

(1). In the concluding acknowledgments of the recent preprint [3], one of the authors (Prof. Q. S. Zhang) thanks us for “helpful comments”. This is confusing, as we had no opportunity to read or comment on the preprint prior to its posting. We note only that, more than six years ago, we exchanged emails with the same author addressing questions about our earlier paper.

第二篇回应：承认一处笔误和一处引用不准确

同日发表的第二篇文章[4]则逐条回应预印本[5]中指出的三项问题。

对于第一项 Bergman 函数争议，作者重申，对方误解了 pcr 定义中线丛次数与度量缩放之间的关系。虽然定义中的参数 j 有统一上界，但在缩放后对应的实际线丛次数 m_j 可以趋于无穷，因此不存在定义上的矛盾。

对于第二项切锥问题，作者承认原论文中确实存在一个符号笔误：某处 “=” 应改为 “ $\leq$ ”。但他们强调，这一修改不会影响后续推导和最终结论。

对于第三项测地线问题，作者表示问题源于文献拆分过程中引用不够准确。文章承认相关定义表述可以改写得更加清晰，但认为原命题证明并未因此失效。

学术讨论仍在继续

在《Two Comments》[2]结尾，陈秀雄与王兵指出，田刚等作者已经将原预印本中的附录独立成新的补充说明[5]，而他们也随即发布了进一步回应[4]。

从目前公开资料看，这场争论已从最初的 Laplace 比较定理扩展到 Kähler–Ricci 流理论中的多个基础技术环节，包括极化规范半径、Bergman 核渐近理论、切锥极限以及测地线连通性等问题。双方均坚持自己的数学判断，并通过连续发布预印本的方式公开交换意见。

对于几何分析领域研究者而言，这类围绕证明细节和定义适用范围展开的公开讨论，是现代数学研究中常见且重要的学术交

流形式。最终相关结论是否成立，仍有待学术共同体进一步检验和评估。

参考文献

- [1] Xiuxiong Chen, Bing Wang, Space of Ricci flws (II)-Part B: Weak compactness of the flws, J. Diff. Geom. 116 (2020), no. 1, 1-123.
- [2] Xiuxiong Chen, Bing Wang, Two Comments on "Laplace comparison on Kahler Ricci flow and convergence (arXiv:2509.14820v1)" [arXiv:2509.23346](#)
- [3] Gang Tian, Qi S. Zhang, Zhenlei Zhang, Meng Zhu, Xiaohua Zhu, Laplace comparison on Kähler Ricci flow and convergence, [arXiv:2509.14820v1](#)
- [4] Xiuxiong Chen, Bing Wang, Response to "Supplement.arXiv.2509.14820 (Laplace comparison etc)", <https://ustcwangbing.github.io/chinese/>, in "further response" under the Preprints/Space of Ricci flws(II).
- [5] Gang Tian, Qi S. Zhang, Zhenlei Zhang, Meng Zhu, Xiaohua Zhu, Supplement.arXiv.2509.14820, <https://sites.google.com/view/qiszhangucr249/home>, click Supplement.arxiv.2509.14820.